221 **223**	**Intégrale impropre d'une f° cont. sur un int. de ℝ. Exples.** **Intégrale d'une f° dépend^t d'un paramètre. Ptés, exples, app.**	Fonction Γ d'Euler	Monier 3 p220. Gourdon p162.

On va proposer de traiter en développement un exemple significatif: la fonction Γ d'Euler.
Cette fonction prolonge l'exponentielle à l'ensemble des réels (H.Prog.: et aussi des complexes, en fait, sauf en certains points).

Pour tout $x \in]0;+\infty[$, l'application $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur]0;+∞[.

On appelle fonction Γ d'Euler l'application Γ:]0;+∞[→ℝ, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.

I. Outils-Equivalence

- Equivalence
- Intégrale de référence de Riemann en 0
- Test du x^α
- Intégration par parties
- (in "*Intégrales dépendant d'un paramètre*"): Corollaire p.220, Monier 3
- Changement de variable.
- (in "*Intégrales dépendant d'un paramètre*"): th. de dérivabilité sous le signe intégral.

II. Développement

A. Existence (intégrabilité).

Notons F: $\left| \begin{array}{l}]0;+\infty[\times]0;+\infty[\to \mathbb{R} \\ (x,t) \mapsto t^{x-1}e^{-t} \end{array} \right.$.

$F(x,.) : t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur]0;+∞[, ← ***ce qui nous ramène ds le cadre de la leçon 221.***

→ Etude sur]0;+∞[
Pour $x \in]0;+\infty[$ fixé, l'application $F(x,.) : t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur]0;+∞[, positive ou nulle.

→ Etude à la borne 0:
$F(x,t) \underset{t\to 0^+}{\sim} t^{x-1}$, et $t \mapsto t^{x-1}$ est intégrable sur]0;1] car $x-1 > -1$, ie −(x-1)<1 (Equivalent à l'Intégrale de Riemann en 0).
Donc F(x,.) est intégrable sur]0;1].

→ Etude à la borne +∞:
$t^2F(x,t) = t^{x+1}e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\to} 0$, donc F(x,.) est intégrable sur [1;+∞[(Test du x^α en ∞).

→ Finalement, F(x,.) est intégrable sur]0;+∞[.

B. Lien avec la factorielle.

a) Mq ∀x∈]0;+∞[, Γ(x+1)=xΓ(x)

Soit $(\varepsilon,T) \in]0;1]\times[1;+\infty[$. (on se ramène sur un compact). On a, par une intégration par parties:

$$\int_\varepsilon^T t^x e^{-t}dt = \left[-t^x e^{-t}\right]_\varepsilon^T + \int_\varepsilon^T xt^{x-1}e^{-t}dt = \varepsilon^x e^{-\varepsilon} - T^x e^{-T} + x\int_\varepsilon^T t^{x-1}e^{-t}dt$$

D'où l'on déduit, en passant à la limite quand $\varepsilon \to 0$ et $T \to \infty$:

$$\Gamma(x+1) \underset{Def}{=} \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}dt = x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt \underset{Def}{=} x\Gamma(x)$$

b) Mq ∀n∈ℕ, Γ(n+1)=n!

On raisonne par récurrence sur n. $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1 = 0!$

Et si $\Gamma(n+1)n!$, alors $\Gamma(n+2) = (n+1)\Gamma(n+2) = (n+1)n! = (n+1)!$ (en utilisant le résultat du a)

C. Régularité: Γ est C$^\infty$ sur]0;+∞[, et expression de $\Gamma^{(k)}$ ←in "*Intégrales dépendant d'un paramètre*".

Montrons que Γ est C∞ sur]0;+∞[, et que ∀k∈ℕ, ∀x∈]0;+∞[, $\Gamma^{(k)}(x)=\int_0^{+\infty}(\ln t)^k\, t^{x-1}e^{-t}dt$.

Notons $F:\left|\begin{array}{l}]0;+\infty[\times]0;+\infty[\to\mathbb{R}\\ (x,t)\mapsto t^{x-1}e^{-t}=e^{(x-1)\ln(t)}e^{-t}\end{array}\right.$

Comme l'exponentielle est C∞, les $\frac{\partial F}{\partial x},\dots,\frac{\partial^k F}{\partial x^k},\dots$ existent et sont continues sur $]0;+\infty[\times]0;+\infty[$.

De plus: ∀k∈ℕ, ∀(x,t)∈ $]0;+\infty[\times]0;+\infty[$, $\frac{\partial^k F}{\partial x^k}(x,t)=(\ln t)^k\, t^{x-1}e^{-t}$ (par récurrence sur k).

Soit K une partie compacte incluse dans]0;+∞[. Il existe (a;b)∈ℝ² tel que: $0<a\le 1\le b$ et $K\subset[a;b]$.
En posant de tels a et b, on aura, dans le "Max" de l'expression ci-dessous, l'un des deux exposants (b-1) positif, et l'autre (a-1) négatif. Le Max sera donc t^{b-1} pour t>1, et t^{a-1} pour t<1 (pour t=1, c'est indifférent).

Notons pour k∈ℕ: $\varphi_{K,k}:]0;+\infty[\to\mathbb{R}$ l'application définie par: ∀t∈]0;+∞[, $\varphi_{K,k}(t)=|\ln t|^k\, Max\left(t^{a-1},t^{b-1}\right)e^{-t}$.

En tant que produit et par composition, $\varphi_{K,k}$ est continue, ≥0, intégrable sur]0;+∞[.

Par ailleurs, on a: $\forall(x,t)\in K\times]0;+\infty[,\quad \left|\frac{\partial^k F}{\partial x^k}(x,t)\right|\le\varphi_{K,k}(t)$

Ainsi, pour tout k de ℕ, $\frac{\partial^k F}{\partial x^k}$ existe et est continue sur]0;+∞[×]0;+∞[, et vérifie l'hypothèse de domination locale sur]0;+∞[×]0;+∞[.
Le résultat voulu découle du Corollaire p.220, Monier 3 (intégrales à paramètres).

D. Une valeur: Γ(1/2) = √π. (+Gourdon) ←in "*Intégrales dépendant d'un paramètre*".

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{+\infty}t^{-1/2}e^{-t}dt=\int_0^{+\infty}2e^{-u^2}du$, en utilisant le <u>changement de variable</u> $u=\sqrt{t}$.

(GOU p.163) L'intégrale $I=\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du$ s'appelle l'intégrale de Gauss. Gourdon donne 2 méthodes de calcul.

Son calcul est plus simple avec un corollaire du Th. de Fubini, mais c'est hors sujet ici.

On considère g:[0;+∞[→ℝ, $g:x\mapsto\int_0^1\frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}dt$.

La fonction $(t,x)\mapsto\frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}$ admet une dérivée partielle continue. On en déduit (th. de <u>dérivabilité sous le signe intégral</u>) que g est dérivable et que: $\forall x\ge 0,\quad g'(x)=-2x\int_0^1 e^{-(t^2+1)x^2}dt=-2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-(tx)^2}dt$.

Après le <u>changement de variable</u> u=tx, il vient:

$$g'(x)=-2e^{-u^2}\int_0^x e^{-u^2}du=-2f'(x)f(x),\ \text{où}\ f:x\mapsto\int_0^x e^{-u^2}du.$$

En intégrant, on déduit:

∀x≥0, $g(x)-g(0)=-\left(f^2(x)-f^2(0)\right)$, donc $g(x)=\frac{\pi}{4}-f^2(x)$ (*)

Les inégalités $0\le g(x)\le e^{-x^2}\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}$ entraînent $\lim_{x\to\infty}g(x)=0$, et la fonction f étant positive, on en déduit avec (*) que:

$\lim_{x\to\infty}f(x)=\sqrt{\frac{\pi}{4}}$, ce qui s'écrit $I=\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Finalement, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2I = \sqrt{\pi}$.

E. Convexité. ←in "*Intégrales dépendant d'un paramètre*". (Monier 3 ex.2.5.57 p.224)

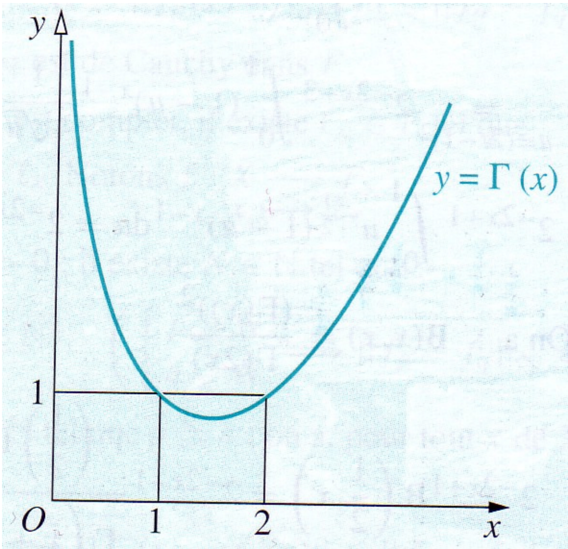
D'après C, Γ est C² sur]0;+∞[, et comme pour tout x de]0;+∞[on a $\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t} dt > 0$, Γ est convexe sur]0;+∞[.

F. Equivalent en 0$^+$.

in "*Intégrales impropres*": on admet que Γ est continue sur]0;+∞[.

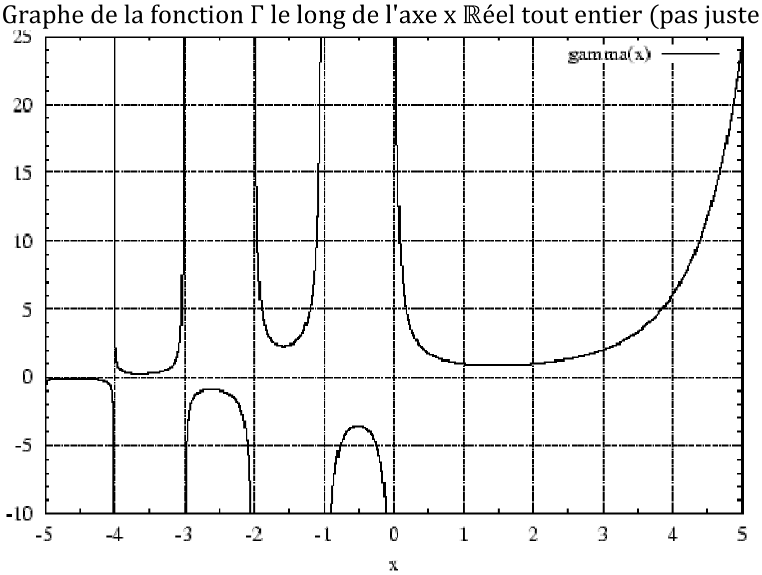
On a, d'après B, pour tout x de]0;+∞[, $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$. Comme Γ est continue sur]0;+∞[, on a donc: $\Gamma(x+1) \underset{x\to 0}{\to} \Gamma(1) = 0! = 1$, d'où $\Gamma(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}$.

G. Allure de la courbe.



III. Notes

Graphe de la fonction Γ le long de l'axe x ℝéel tout entier (pas juste ℝ+).



221 223	Intégrale impropre. Intégrale d'une f° dépend[t] d'un paramètre.	Fonction Γ d'Euler	Monier 3 p220. Gourdon p162.

(Wikipedia) Le logarithme de la fonction gamma est parfois appelé **lngamma**. Il intervient notamment dans la résolution des problèmes de propagation d'ondes : l'équation fonctionnelle de la fonction lngamma est :

$$\ln\Gamma(z) = \ln\Gamma(z+1) - \ln(z) \ .$$

La première occurrence de la fonction gamma dans la littérature est due à Daniel Bernoulli dans une lettre à Christian Goldbach.

St.-Pétersbourg ce 6 octobre 1729. **Dan. Bernoulli.**

P.S. **Voici le terme général pour la suite $1+1.2+1.2.3+$etc. Soit x l'exposant du terme, et A un nombre infini, je dis que le terme général sera**

$$\left(A+\frac{x}{2}\right)^{x-1}\left(\frac{2}{1+x}\cdot\frac{3}{2+x}\cdot\frac{4}{3+x}\cdots\cdot\frac{A}{A-1+x}\right)$$

Si au lieu de prendre A infiniment grand, on le fait $=$ à un nombre un peu grand, on aura le terme général à peu près. Si $x=\frac{3}{2}$ et qu'on fait $A=8$ on aura

$$\sqrt{\frac{19}{2}}\left(\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{10}{11}\cdot\frac{12}{13}\cdot\frac{14}{15}\cdot\frac{16}{17}\right)=1{,}3005$$

par le moyen des logarithmes on approche très vitement. Si $x=3$ et $A=16$, au lieu de 6 on trouve $(6\,.\,17\frac{1}{2}\,.\,17\frac{1}{2}):17\,.\,18=6\frac{1}{204}$.

En notation moderne

$$x! = \lim_{n\to\infty}\left(n+1+\frac{x}{2}\right)^{x-1}\prod_{i=1}^{n}\frac{i+1}{i+x}$$